PROBLEMA 1: POTENCIAL Y CAMPO ELÉCTRICO ESTÁTICO EN LA LEJANÍA DE UN DISPOSITIVO DE DOS TERMINALES RECTILÍNEOS MUY LARGOS.

Suponga que tiene un dispositivo de dos terminales, como una resistencia, un condensador o un diodo. Para visualizar cómo es el campo eléctrico y el potencial en el exterior del dispositivo, puede hacerse la aproximación de que los conductores son rectilíneos, muy delgados y de longitud mucho mayor que las dimensiones del dispositivo en sí. De esta manera, para el propósito de calcular el campo externo lejano, puede considerarse que sólo se tiene los dos filamentos metálicos, separados una distancia despreciable, con una diferencia de potencial *V*. Basado en esta aproximación, determina el potencial y el campo electrostático externo al dispositivo. Describe cómo son las superficies equipotenciales y las líneas de campo eléctrico.

Solución.

Se colocan los dos filamentos en el eje *z*, uno ocupa el semieje *z* positivo, y el otro el semieje *z* negativo. Entonces cada semieje tiene un potencial constante. El semieje *z* positivo es el cono $\theta = 0$, con $0 < r < \infty$, mientras que el semieje *z* negativo es el cono $\theta = \pi$, con $0 < r < \infty$. Como el potencial es constante en dichos conos para todo valor de *r*, el potencial es independiente de *r*. Además, en el problema hay simetría rotacional alrededor del eje *z*, por lo que el potencial no depende de la coordenada φ.

Por lo tanto, el potencial depende sólo de la coordenada θ y la solución debe ser la solución trivial:

$$\phi(\theta) = C + D \ln[\tan(\theta/2)]$$

Obsérvese que la solución trivial es singular en $\theta=0$ y en $\theta=\pi$. Para evitar las singularidades, se obtendrá la solución suponiendo que los filamentos son conos de un ángulo pequeño α, y luego se hará tender dicho ángulo a cero.

Supóngase que las condiciones de frontera son:

$\phi(\alpha) = V/2$, $\phi(\pi-\alpha) = -V/2$

Entonces:

$$\phi(\alpha) - \phi(\pi-\alpha) = V = D\left[\ln\left[\tan(\alpha/2)\right] - \ln\left[\tan((\pi-\alpha)/2)\right]\right]$$

$$V = D\ln\left[\frac{\tan(\alpha/2)}{\tan(\pi/2-\alpha/2)}\right] = D\ln\left[\tan^2(\alpha/2)\right] \Rightarrow D = \frac{V}{2\ln[\tan(\alpha/2)]}$$

Sustituyendo en la primera condición de frontera:

$$\frac{V}{2} = C + \frac{V}{2\ln[\tan(\alpha/2)]}\ln[\tan(\alpha/2)] \Rightarrow C = 0$$

Entonces, el potencial electrostático de este problema es:

$$\phi(\theta) = \lim_{\alpha\to 0}\left(V\,\frac{\ln[\tan(\theta/2)]}{2\ln[\tan(\alpha/2)]}\right)$$

Se deja como ejercicio para el estudiante demostrar, mediante la aplicación de límites e identidades trigonométricas, que este potencial satisface las condiciones de frontera.